

APLICAÇÃO DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO TEOREMA CINEMÁTICO À DETERMINAÇÃO DE IMPULSOS DE TERRAS

APPLICATION OF NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE KINEMATIC THEOREM IN LIMIT ANALYSIS TO EARTH PRESSURES CALCULATION

Asciuto, Alessandro, *ISEL, Lisboa, Portugal, aasciuto@dec.isel.ipl.pt*

Antão, Armando, *FCT/DECivil, Caparica, Portugal, amna@fct.unl.pt*

Guerra, Nuno, M. da Costa, *IST/DECivil, Lisboa, Portugal, nguerra@civil.ist.utl.pt*

Lopes M.^a da Graça D. A., *ISEL, Lisboa, Portugal, glopes@dec.isel.ipl.pt*

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um estudo cujo objectivo principal é a aplicação e validação de um programa de cálculo automático que implementa numericamente o teorema cinemático à determinação dos valores dos coeficientes de impulso de terras sobre uma estrutura de suporte. Os casos estudados correspondem a maciços puramente atríticos, com superfície horizontal, aplicando os impulsos sobre um paramento vertical rugoso. Determinam-se coeficientes de impulso correspondentes a carregamentos motivados pelo peso do solo e pela aplicação de sobrecargas à superfície do terreno. Comparam-se os valores calculados com os obtidos de soluções existentes do teorema cinemático e do teorema estático.

ABSTRACT

The main aim of the study presented in this paper is to apply and validate an automatic calculation program for numerical implementation of the kinematic theorem of limit analysis in the calculation of earth pressure coefficients on a rigid retaining structure. The analysis is carried out on frictional soils with horizontal ground surface and vertical retaining wall with friction. Earth pressure coefficients due to the soil weight and uniform vertical surcharge with ground surface are determined. Finally, the results are compared with those given by upper- and lower-bound existing solutions.

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A utilização dos teoremas cinemático (ou da região superior) e estático (ou da região inferior) da análise limite no estudo da estabilidade de uma estrutura mecânica permite, a partir das condições impostas sobre o comportamento dos materiais constituintes, da sua geometria e do modo de carregamento, enquadrar a fronteira \mathbf{F} do conjunto das cargas suportáveis por essa estrutura. Os carregamentos que se encontrem sobre a fronteira \mathbf{F} são designados por carregamentos limites. Se um dado carregamento que actua sobre uma estrutura pertence ao conjunto das cargas suportáveis, a estrutura será estável. Evidencia-se, assim, a importância de conhecer a forma de \mathbf{F} . Em casos pontuais, a aplicação dos teoremas acima referidos conduz a resultados coincidentes, levando assim à determinação dos valores exactos dos carregamentos limites suportáveis pela estrutura. Em geral, não se consegue obter a exacta fronteira \mathbf{F} e torna-se necessário recorrer à determinação de aproximações, quer pelo seu interior quer pelo seu exterior, utilizando respectivamente o teorema estático e o teorema cinemático.

Este trabalho tem por base o teorema cinemático, cuja aplicação passa pelo cálculo da diferença entre a potência dissipada plasticamente pelo material, P_i , e a potência fornecida pelo carregamento exterior, P_e , num dado campo de velocidades. Se essa diferença é negativa, o carregamento não será suportado pela estrutura. A minimização de $P_i - P_e$ conduz a aproximações exteriores da fronteira \mathbf{F} do conjunto dos carregamentos suportáveis, tornando-se necessária a optimização deste processo por forma a encontrar a que melhor represente o valor teórico dos carregamentos limites.

O objectivo principal deste estudo consiste na aplicação e validação de um programa de cálculo automático de aproximações de carregamentos limite à determinação dos valores dos coeficientes de impulso de terras sobre uma estrutura de suporte. Este programa implementa numericamente o teorema cinemático estabelecendo automaticamente o campo de velocidades que minimizam a diferença $P_i - P_e$. Por conseguinte, os mecanismos constituem um resultado directo da aplicação desta ferramenta de cálculo. O método de resolução do problema de minimização adoptado, a sua discretização recorrendo ao método dos elementos finitos bem como a sua implementação numérica e bases teóricas encontram-se descritos em [1] e [2], representando este último trabalho o ponto de partida para a realização deste artigo.

2. METODOLOGIA

2.1 Definição do modelo

Pretende-se com este estudo determinar coeficientes de impulso activos e passivos. Para ambos os casos determinam-se pressões de terras para dois carregamentos: um correspondente à aplicação do peso volúmico (Figura 1) e o outro correspondente à aplicação de uma sobrecarga constante à superfície horizontal do terrapleno (Figura 2). O objectivo é, assim, determinar-se coeficientes K_{ay} e K_{py} para o primeiro caso e K_{aq} e K_{pq} para o segundo. Como mostram as figuras, para o primeiro carregamento admitiram-se diagramas de pressões normais, σ_x , e tangenciais, τ , triangulares, enquanto que para o segundo se consideraram diagramas de pressões rectangulares. Admitem-se neste trabalho tensões tangenciais positivas quando com sentido ascendente, conforme indicado nas figuras seguintes. O ângulo de atrito solo-estrutura é assim dado por:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\tau}{\sigma_x}\right) \quad (1)$$

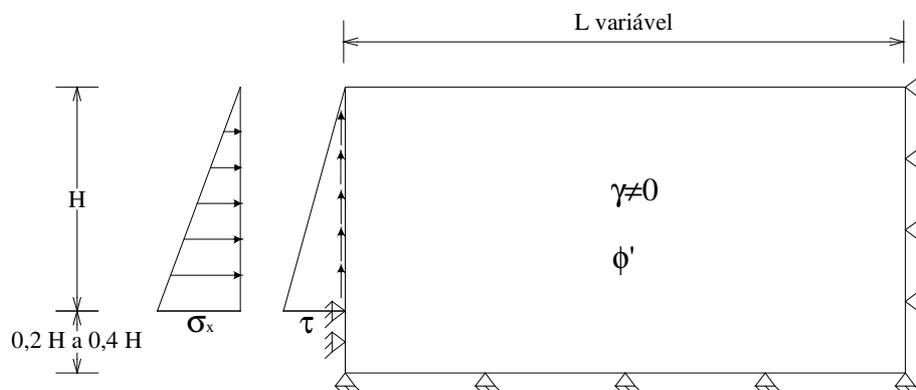


Figura 1 – Definição esquemática da geometria e carregamentos – aplicação do peso volúmico

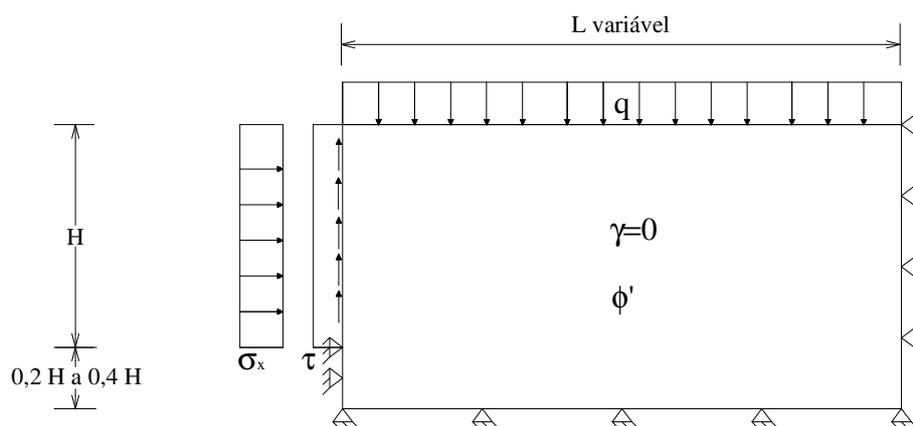


Figura 2 – Definição esquemática da geometria e carregamentos – aplicação da sobrecarga q à superfície do terreno

2.2 Escolha da malha de elementos finitos

A ferramenta numérica usada fornece soluções da região superior com aproximação dependente do refinamento considerado para a malha. Por motivos que ultrapassam o âmbito do presente trabalho, os elementos finitos utilizados são triangulares e usam uma aproximação linear para a a velocidade de deslocamento e, portanto, uma aproximação constante para as velocidades de deformação (ver [1]). Os elementos triangulares são obtidos a partir de elementos rectangulares através da sua divisão em quatro recorrendo às suas diagonais. Para a escolha da malha de elementos finitos foram testados para o caso da determinação de $K_{p\gamma}$ correspondente a $\phi' = 30^\circ$ e $\delta = 2\phi'/3$ diversos níveis de refinamento com o objectivo de se obter um adequado compromisso entre o tempo de cálculo e a precisão da solução. Tendo-se adoptado para os elementos rectangulares que dão origem aos triângulos da malha uma relação entre altura e largura unitária, apresenta-se na Figura 3 a evolução dos valores do coeficiente de impulso $K_{p\gamma}$ em função do número de elementos quadrangulares dispostos na direcção vertical, ao longo da altura H (Figuras 1 e 2).

A curva obtida e os resultados provenientes de outras soluções de referência [3,4,5] (valores entre 5,26 e 5,34), levaram a considerar como satisfatório o nível de refinamento correspondente a 50 elementos quadrados dispostos na direcção vertical, para o qual se obtém $K_{p\gamma} = 5,26$.

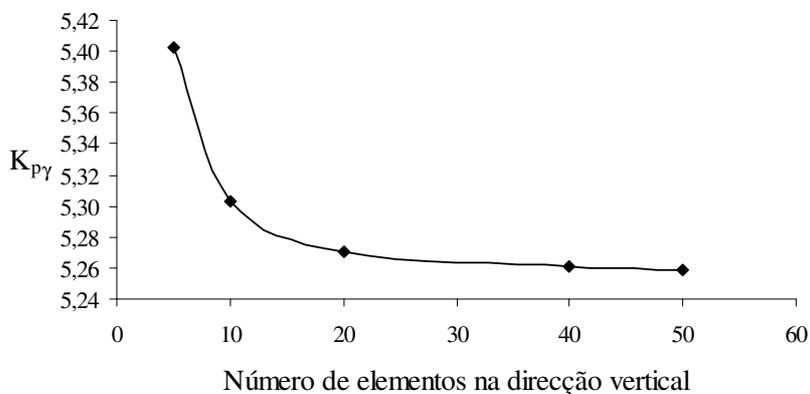


Figura 3 – Refinamento da malha

3. CASOS EM ESTUDO

Como foi anteriormente referido pretende-se efectuar o estudo num maciço de solo sem coesão. No entanto, devido a considerações de origem teórica e de resolução numérica, introduziu-se nos cálculos um valor de coesão de 0,001 kPa. Para os casos em estudo admitiu-se um estado plano de deformação, tendo o solo uma superfície de cedência definida pelo critério de Mohr-Coulomb.

3.1 Carregamentos motivados pelo peso volúmico do solo

Foram determinados coeficientes de impulso de terras relativos a carregamentos devidos a um maciço de peso volúmico γ , altura H , ângulos de atrito $\phi'=20^\circ$, 30° e 40° e com δ variável entre 0° e ϕ' . A descrição geométrica do problema é ilustrada na Figura 1. Na Figura 4 mostra-se a imagem da aproximação da fronteira F_γ obtida para o ângulo de atrito $\phi'=30^\circ$. A fronteira é assim designada pelo facto de o carregamento em estudo ser constituído pelo peso volúmico. Os parâmetros η_v e η_h referidos na figura são definidos através de:

$$\eta_h = \frac{\sigma_x}{\gamma z} \quad \text{e} \quad \eta_v = \frac{\tau}{\gamma z} \quad (2)$$

onde os parâmetros η_v e η_h representam, respectivamente, a pressão horizontal e a tensão tangencial adimensionalizados em relação à profundidade, z , e ao peso volúmico do solo, γ .

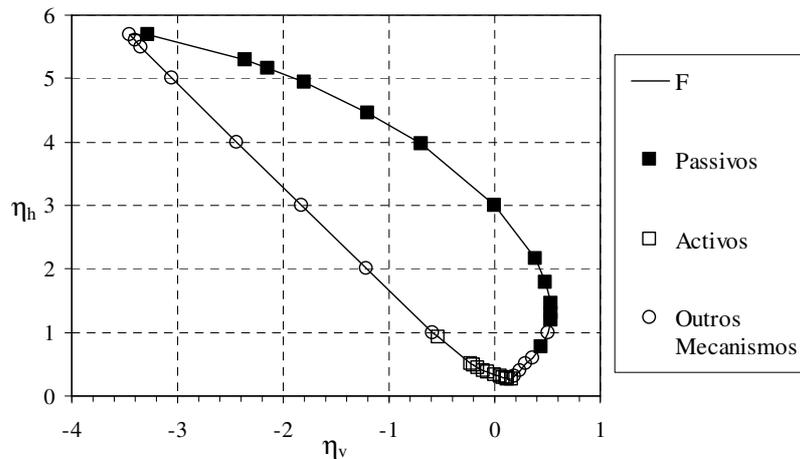


Figura 4 – Representação do conjunto F_γ aproximado para o caso $\phi'=30^\circ$

A fronteira F_γ foi obtida através da determinação de coeficientes de impulso activo e passivo com valores de δ positivos e negativos. Os valores destes impulsos foram determinados impondo-se uma relação constante entre σ_x e τ e portanto, um valor fixo de δ . Os casos tradicionais correspondem a valores positivos de δ para o caso do impulso activo e a valores negativos deste ângulo para o caso do impulso passivo. Com o objectivo de completar a forma da fronteira F_γ , foram realizados cálculos adicionais, denominados “outros mecanismos” [2], não enquadráveis nos casos clássicos, atrás referidos, de impulso activo e passivo. Estes cálculos foram realizados mantendo fixo o valor de uma das tensões aplicadas e fazendo variar o valor da outra. Note-se que, para os casos indicados como passivos e activos, η_h e η_v representam respectivamente as componentes horizontal e vertical dos coeficientes de impulso.

Apresenta-se nas Figuras 5 e 6 as malhas deformadas e a taxa de dissipação interna para dois casos: um primeiro correspondente a um impulso activo quando $\delta=\phi'/3$; o segundo correspondente a um “outro mecanismo”, quando $\eta_v=0,51$ e $\eta_h=1,00$. No caso do impulso activo (Figura 5), verifica-se a formação de uma cunha de solo em deformação plástica, formando uma zona de contacto com o restante solo que não se afasta significativamente de uma superfície plana. Este resultado é típico da determinação de impulsos activos. No caso do “outro mecanismo” (Figura 6), evidencia-se um tipo de cinemática não englobável em qualquer tipo de mecanismo tradicional. Chama-se a atenção para o facto de que, por motivos de visualização gráfica, se apresentam figuras de malhas menos finas que as utilizadas nos cálculos para os quais se obtiveram os valores apresentados.

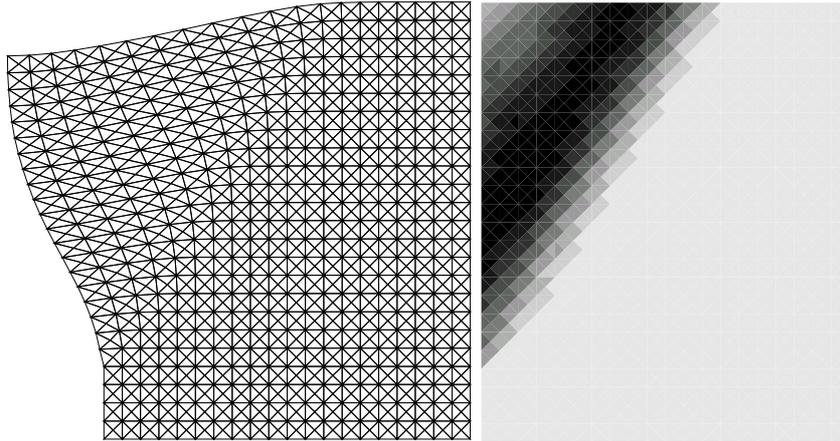


Figura 5 – Malha deformada e taxa de dissipação interna obtidas no cálculo do coeficiente de impulso activo para $\phi'=30^\circ$ e $\delta=\phi'/3$

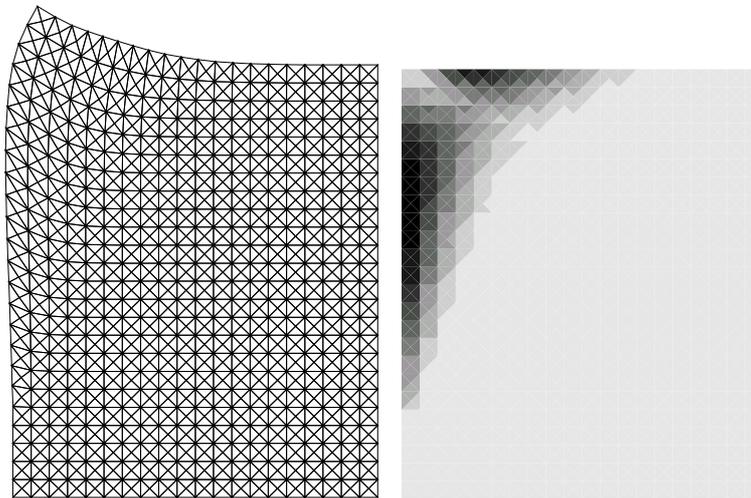


Figura 6 – Malha deformada e taxa de dissipação interna obtidas para $\phi'=30^\circ$, $\eta_v=0,51$ e $\eta_h=1,00$

3.2 Carregamentos motivados pela aplicação de sobrecargas à superfície do terreno

Foram determinados coeficientes de impulso de terras relativos a carregamentos devidos à aplicação de sobrecargas, q , à superfície do terreno com peso volúmico nulo ($\gamma=0$), altura H , ângulos de atrito $\phi'=20^\circ$, 30° e 40° e com δ variável entre 0° e ϕ' . A geometria do problema é

descrita na Figura 2. A determinação dos coeficientes de impulso de terras é realizada através de um processo semelhante ao da subsecção anterior e a fronteira F relativa ao tipo de carregamento é designada por F_q .

Na Figura 7 ilustra-se a imagem da aproximação da fronteira F_q obtida para um ângulo de atrito $\phi'=30^\circ$ onde os parâmetros η_v e η_h são definidos por:

$$\eta_h = \frac{\sigma_x}{q} \quad \text{e} \quad \eta_v = \frac{\tau}{q} \quad (3)$$

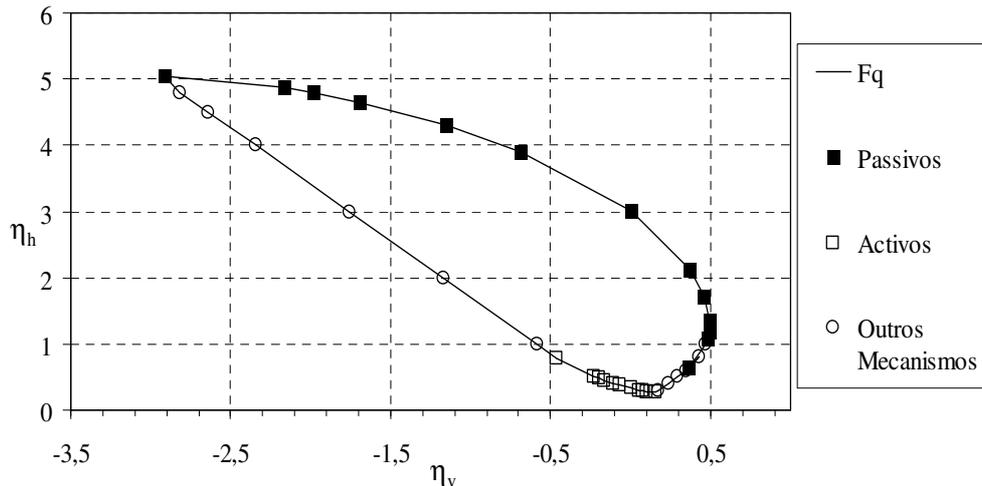


Figura 7 – Representação do conjunto F_q aproximado para o caso $\phi'=30^\circ$

Apresenta-se nas Figuras 8 e 9 as malhas deformadas e a taxa de dissipação interna para dois casos: um primeiro correspondente a um impulso passivo quando $\delta=\phi'/3$ e um segundo correspondente a um “outro mecanismo”, quando $\eta_v=-2,35$ e $\eta_h=4,00$. No caso do impulso passivo (Figura 8), verifica-se a formação de uma cunha de solo em deformação plástica, formando uma zona de contacto com o restante solo com forma curva nas maiores profundidades evoluindo para uma forma planar nas menores profundidades, formando aqui um ângulo com a horizontal de aproximadamente $45^\circ-\phi'/2=30^\circ$. Este resultado é típico da determinação de impulsos passivos. No caso do “outro mecanismo” (Figura 9), evidencia-se, tal como na Figura 6, um tipo de cinemática não englobável em qualquer tipo de mecanismo tradicional, com a zona em deformação restringindo-se a uma localização muito próxima do paramento vertical.

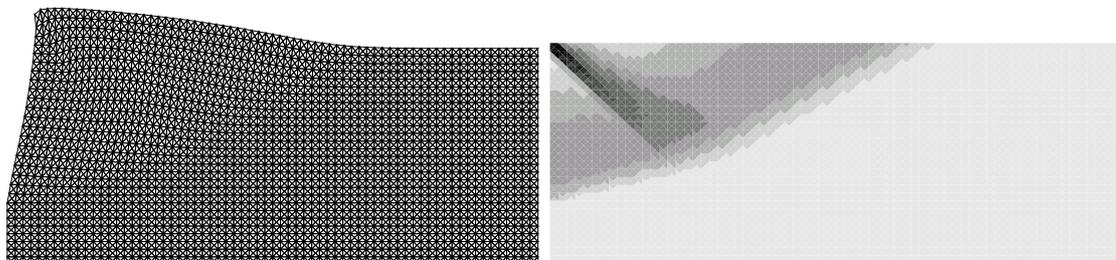


Figura 8 – Malha deformada e taxa de dissipação interna obtidas no cálculo do coeficiente de impulso passivo para $\phi'=30^\circ$ e $\delta=\phi'/3$

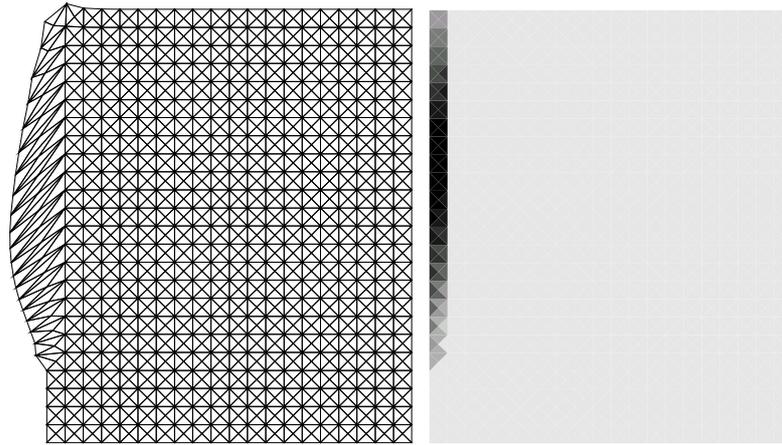


Figura 9 – Malha deformada e taxa de dissipação interna obtidas para $\phi'=30^\circ$, $\eta_v=-2,35$ e $\eta_h=4,00$

3.3 Comparação com outras soluções existentes

3.3.1 Carregamentos motivados pelo peso do solo

Na Figura 10 apresenta-se graficamente a comparação entre os valores de coeficiente de impulso activo, K_{ay} , e passivo, K_{py} , calculados pela metodologia numérica anteriormente apresentada e os fornecidos pelos métodos de Coulomb (solução da região superior) e de Kérisel-Absi (solução da região inferior), na situação de carregamentos motivados pelo peso do solo, para ângulos $\phi'=20^\circ$, 30° e 40° .

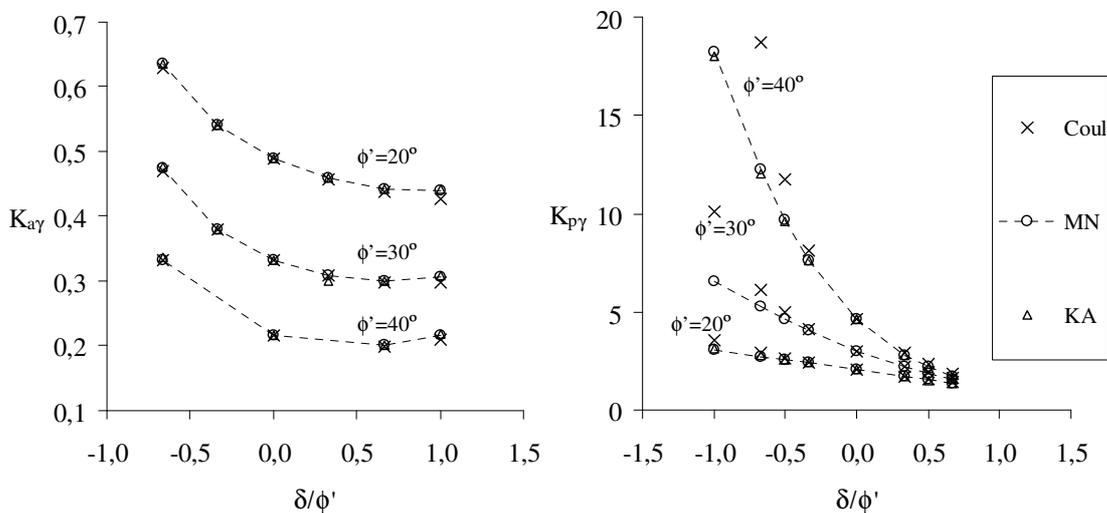


Figura 10 – Comparação entre os valores de K_{ay} e K_{py} calculados pelo método numérico (MN) e os fornecidos por Coulomb (Coul) e Kérisel-Absi (KA)

Os Quadros 1 e 2 mostram, para o exemplo de $\phi'=30^\circ$, a comparação entre os coeficientes de impulso activo e passivo calculados e os obtidos por outros métodos.

Quadro 1 – Comparação entre os coeficientes de impulso activo K_{ay}

K_{ay} (activo tradicional)					
		Soluções da região superior			Solução da região inferior
ϕ' (°)	δ (°)	Coulomb [7]	Soubra-Macuh [3]	Cálculo	Kérisel-Absi [6]
30	0	0,333	0,333	0,333	0,333
	$\phi'/3$	0,308	0,309	0,309	0,30
	$\phi'/2$	0,301	0,303	0,303	-
	$2\phi'/3$	0,297	0,300	0,301	0,300
	ϕ'	0,297	0,304	0,307	0,308

Quadro 2 – Comparação entre os coeficientes de impulso passivo K_{py}

K_{py} (passivo tradicional)						
		Soluções da região superior				Solução da região inferior
ϕ' (°)	δ (°)	Coulomb [7]	Soubra-Macuh [3]	Kumar-Subba Rao [4]	Cálculo	Kérisel-Absi [6]
30	0	3,00	3,00	3,00	3,00	3,0
	$\phi'/3$	4,14	4,03	4,02	4,02	4,0
	$\phi'/2$	4,98	4,65	4,62	4,62	4,6
	$2\phi'/3$	6,11	5,34	5,26	5,26	5,3
	ϕ'	10,10	6,93	6,68	6,56	6,5

A utilização duma solução da região superior subestima o valor do impulso activo e sobrestima o valor do impulso passivo. O contrário verifica-se para as soluções da região inferior. A análise do Quadro 1 permite constatar que os valores de K_a determinados pela metodologia numérica apresentada são superiores ou iguais aos dos restantes métodos da região superior e muito próximos dos obtidos através da solução da região inferior de Kérisel & Absi. Tal demonstra a proximidade à solução exacta.

De igual forma, os valores de K_p calculados são inferiores ou iguais aos dos restantes métodos da região superior e igualmente muito próximos dos valores da região inferior de Kérisel & Absi, mostrando portanto, também, a proximidade à solução exacta.

3.3.2 Carregamentos motivados pela aplicação de sobrecargas à superfície do terreno

Para este tipo de carregamento e para ângulos $\phi'=20^\circ$, 30° e 40° , os coeficientes de impulsos activo, K_{aq} , e passivo, K_{pq} , resultantes da aplicação do programa de cálculo, assim como os fornecidos pelas tabelas de Kérisel-Absi (para o caso activo) e por Soubra-Macuh (para os casos activo e passivo), são apresentados graficamente na Figura 11.

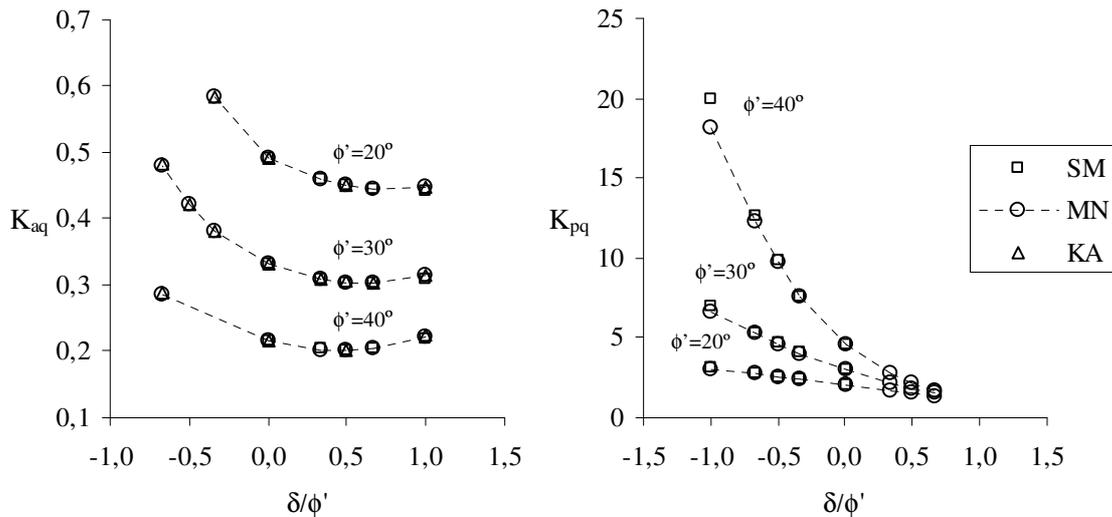


Figura 11 – Comparação entre os valores de K_{aq} e K_{pq} calculados pelo método numérico (MN) e os fornecidos por Soubra-Macuh (SM) e Kérisel-Absi (KA)

Os Quadros 3 e 4 fornecem também algumas comparações correspondentes aos coeficientes de impulso activo e passivo para o caso $\phi' = 30^\circ$.

Quadro 3 – Comparação entre os coeficientes de impulso activo K_{aq}

K_{aq} (activo tradicional)				
		Soluções da região superior		Solução da região inferior
ϕ' (°)	δ (°)	Soubra-Macuh [3]	Cálculo	Kérisel-Absi [6]
30	0	0,333	0,333	0,333
	$\phi'/3$	0,310	0,310	0,310
	$\phi'/2$	0,304	0,304	0,305
	$2\phi'/3$	0,302	0,303	0,304
	ϕ'	0,309	0,314	0,315

Quadro 4 – Comparação entre os coeficientes de impulso passivo K_{pq}

K_{pq} (passivo tradicional)				
		Soluções da região superior		
ϕ' (°)	δ (°)	Soubra-Macuh [3]	Cálculo	
30	0	3,00	3,00	
	$\phi'/3$	3,98	3,95	
	$\phi'/2$	4,53	4,45	
	$2\phi'/3$	5,10	4,94	
	ϕ'	6,28	5,83	

Também nesse caso os gráficos da Figura 11 e os Quadros 3 e 4 evidenciam a boa qualidade dos valores obtidos sem que exista discordância com os outros métodos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aplicou-se uma implementação numérica do teorema cinemático à determinação de impulsos de terras de solos puramente atríticos devidos aos carregamentos correspondentes ao peso próprio do solo e a uma sobrecarga aplicada à superfície do terreno suportado.

Estes resultados permitem a definição de duas fronteiras dos carregamentos suportáveis pelo maciço, uma para cada um dos carregamentos considerados. A definição completa desta fronteira evidenciou a existência de mecanismos enquadráveis nos cálculos clássicos de impulsos activos e passivos, mas também de outros mecanismos.

A comparação dos resultados dos coeficientes de impulso obtidos com os provenientes de outros autores utilizando quer o teorema cinemático quer o teorema estático mostrou que, por um lado, o método desenvolvido fornece, globalmente, melhores soluções que os outros métodos que utilizam soluções da região superior (teorema cinemático). Por outro lado, a comparação com resultados que utilizam soluções da região inferior (teorema estático) mostra uma grande proximidade, permitindo concluir que os resultados obtidos estão muito próximos da solução exacta.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Antão, A., Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [2] Antão, A., Implementação numérica do teorema cinemático da análise limite. Aplicação à determinação dos coeficientes de impulso activo e passivo de um meio puramente atrítico. Actas do VII Congresso Nacional de Mecânica Teórica, Aplicada e Computacional, Évora Geotecnia, Vol. 4, 2003, pp. 1989-1998.
- [3] Soubra, A., H., Macuh, B., Active and passive earth pressure coefficients by a kinematical approach, Proceedings of the Institution of Civil Engineering, Geotechnical Engineering 155, Issue 2, 2002, pp. 119-131.
- [4] Kumar, J., Subba Rao; K., S., Passive pressure coefficients, critical failure surface and its kinematic admissibility. Géotechnique, 47, No. 1, 1997, pp. 185-192.
- [5] Kumar, J., Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structures: Discussion, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 38, 2001, pp. 1149-1150.
- [6] Kérisel, J., Absi, E., Active and passive earth pressure tables. A. A. Balkema Publishers, 1990.
- [7] Coulomb, C. A. Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, Mem. Acad. Roy., 7, p 38, 1776.